Günther Malle
Universität Wien

PROBLEME DES TERMUMFORMENS

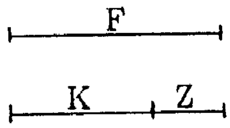
Im folgenden beschreibe ich vier Phasen, in die meines Erachtens ein sinnvoller Unterricht im Termumformen zerfallen sollte. Diese Phasen laufen im Unterricht nicht streng hintereinander ab, sie überschneiden sich sogar zeitlich sehr stark, trotzdem seien diese Phasen im folgenden der Deutlichkeit halber nacheinander besprochen.

Phase 1: Naives Termumformen ohne Regeln (1. und 2. Klasse)

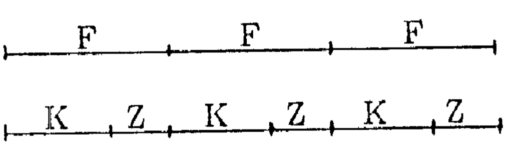
Nach den Vorgaben des Lehrplans soll der Schwerpunkt in der 1. und 2. Klasse beim Aufstellen und Interpretieren von Formeln liegen. Das Umformen von Termen oder Gleichungen soll dabei nur eine ganz untergeordnete Rolle spielen und nur aufgegriffen werden, wenn es sich im Rahmen einer Formelaufstellaufgabe bzw. Formelinterpretationsaufgabe zwanglos anbietet.

Betrachten wir ein Beispiel. Der Fahrpreis bei der Fahrt mit einem Intercityzug setzt sich zusammen aus dem Kartenpreis und dem Zuschlag. Die Schüler können dazu folgende Formel aufstellen:

$$F = K + Z$$



Mit dieser Formel lassen sich allerlei Aktivitäten durchführen. U.a. kann man die Schüler auffordern, eine Formel für den Gesamtpreis G aufzustellen, wenn drei Personen fahren. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:



$$G = 3 \cdot F = 3 \cdot (K + Z) \qquad G = 3 \cdot K + 3 \cdot Z$$

Da in beiden Fällen der gleiche Gesamtpreis herauskommen muß, ergibt sich:

$$G = 3 \cdot (K + Z) = 3 \cdot K + 3 \cdot Z$$

Und wenn n Personen fahren, ergibt sich:

$$G = n \cdot (K + Z) = n \cdot K + n \cdot Z$$

Damit ist im Prinzip das Distributivgesetz der Multiplikation gegenüber der Addition formuliert, jedoch noch nicht als allgemeine Regel, sondern als eine Formel mit *kontextabhängigen Variablen*, d.h. mit Variablen, die nur im Rahmen dieses Beispiels eine Bedeutung haben. Die Formel ist eine bloße ad-hoc-Formel, die man wieder vergessen kann. Sie hat noch nicht den Charakter einer allgemeinen Regel.

Derartige Überlegungen können bei verschiedenen Gelegenheiten immer wieder auftauchen. Z.B.:

> Jemand kauft in einem Geschäft x kg Zucker und in einem anderen Geschäft y kg Zucker, wobei ein kg Zucker 15 S kostet. Stelle eine Formel für den Gesamtpreis G auf!

Eine Streckendarstellung ist hier leider nicht möglich. Man kann aber leicht inhaltlich begründen, daß der Gesamtpreis auf zwei Arten dargestellt werden kann:

$$G = 15 \cdot (x + y) = 15 \cdot x + 15 \cdot y$$

Bei einem Kilopreis von p S ergibt sich:

$$G = p \cdot (x + y) = p \cdot x + p \cdot y$$

Wiederum wird dasselbe Distributivgesetz wie vorhin mit kontextabhängigen Variablen hingeschrieben, wobei diesmal andere Buchstaben verwendet werden.

Auch wenn es einem bei derartigen Beispielen noch so unter den Nägeln brennt, daraus eine allgemeine Regel zu extrahieren, sollte man dies in dieser Phase noch nicht tun (es sei denn, die Schüler tun es von sich aus). Es geht in dieser Phase nicht um die Formulierung von formalen Regeln, sondern zunächst noch um die Entwicklung des semantischen (anschaulich-intuitiven) Hintergrundes dieser Regeln anhand vieler Beispiele. Es ist einer der größten Fehler des derzeitigen Algebraunterrichts, daß Beispiele der angeführten Art meist nur eine Alibifunktion haben und lediglich dazu dienen, möglichst schnell zu formalen Regeln zu kommen. Dies hat zur Folge, daß sich bei vielen Schülern der semantische Hintergrund der Regeln erst gar nicht entwickelt und dadurch das Termumformen zu einem sinnentleerten „Buchstabenjonglieren“ wird.

Phase 2: Erarbeiten und Formulieren von Termumformungsregeln (2. bis 4. Klasse)

Nach dem intuitiven Vorspiel in der Phase 1 sollen nun Regeln formuliert werden. Um zu einer allgemeinen Regel zu kommen, ist es zweckmäßig, den Schülern nochmals eine Sequenz analoger Aufgaben vorzustellen, z.B.:

1) Berechne geschickt: $100 - 27 - 13$. Beschreibe den Rechengang mit Variablen!

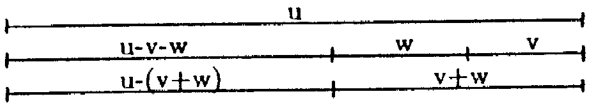
Lösung: $100 - 27 - 13 = 100 - (27 + 13) = \dots$
$x - y - z = x - (y + z)$

2) Jemand hat a S. Er gibt zuerst b S und dann c S aus. Beschreibe auf zwei Arten, wie man das verbleibende Restgeld berechnen kann!

Lösung: $a - b - c = a - (b + c)$

3) Begründe mit Strecken: $u - v - w = u - (v + w)$

Lösung:



Aus der Frage, welche Beziehung diesen Aufgaben gemeinsam ist, ergibt sich eine allgemeine Regel, die wir mit *kontextfreien Variablen* notieren:

$$A - B - C = A - (B + C)$$

Die Verwendung einer eigenen Sorte von Buchstaben, nämlich Großbuchstaben, zur Formulierung von Regeln, ist meines Erachtens empfehlenswert, weil dadurch die Kontextfreiheit und damit die Allgemeingültigkeit der Regeln betont wird und weil weiters dadurch die Vorstellung erleichtert wird, daß man die Großbuchstaben $A, B, C, \dots$ einer Regel nicht nur durch andere Einzelbuchstaben, sondern auch durch komplexere Terme ersetzen darf.

Auf ähnliche Weise können auch alle weiteren Termumformungsregeln, die man in der Schule benötigt, erarbeitet werden (siehe dazu PERNITSCH 1995).

Welche Termumformungsregeln in der Schule wirklich gebraucht werden, ist allerdings eine schwierige (im Grunde ungelöste) didaktische Frage. Unbestritten ist, daß man in der Schule nicht bis auf die Ebene der Körperaxiome zurückgehen kann und dadurch viele Termumformungen nicht exakt begründen kann. In vielen Fällen muß man sich anstelle von Regeln mit vagen sprachlich formulierten Äußerungen begnügen, z.B.: „Eine Klammer wird mit einer Zahl multipliziert, indem man ...“. (Zur Diskussion dieser sog. *Metaschemata* siehe MALLE 1993.) Eine genaue Inspektion der in der Schule vorkommenden Beispiele hat ergeben, daß die 10 Regeln auf der nächsten Seite zweckmäßig sind. Davon sind die Regeln (1), (2), (3) unverzichtbar, die Regeln (4), (5), (6), (7) angenehm, aber nicht unbedingt notwendig, und die Regeln (8) und (9) am unwichtigsten. (Selbstverständlich soll jeder Schüler diese Kommutativ- und Assoziativgesetze kennenlernen, weil sie wichtige Schritte des arithmetischen Rechnens rechtfertigen, beim Buchstabenrechnen spielen diese Regeln jedoch kaum eine Rolle, weil ihre bewußte Anwendung überspielt werden kann.)

(1) Klammerauflösungsregeln:
$A+(B+C)=A+B+C \qquad A+(B-C)=A+B-C$
$A-(B+C)=A-B-C \qquad A-(B-C)=A-B+C$

(2) Distributivgesetze:
$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \qquad A\cdot(B-C)=A\cdot B-A\cdot C$

(3) Bruchrechenregeln:
$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C} \qquad \frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C} \qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$
$\frac{A}{B}\cdot C=\frac{A\cdot C}{B} \qquad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$
$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$

(4) Verallgemeinerte Vorzeichenregeln:
$(-A)\cdot B=A\cdot(-B)=-(A\cdot B) \qquad (-A)\cdot(-B)=A\cdot B$

(5) Regel der doppelten Inversion:
$-(-A)=A$

(6) Inversion von „Summen“:
$-(A+B)=-A-B \qquad -(-A+B)=A-B$
$-(A-B)=-A+B \qquad -(-A-B)=A+B$

(7) Definitionen mehrgliedriger Summen bzw. Produkte:
$A+B+C=(A+B)+C \qquad A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C$

(8) Kommutativgesetze:
$A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$

(9) Assoziativgesetze:
$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

Phase 3: Bewußtes Anwenden von Termumformungsregeln (3. und 4. Klasse)

Präzise Formulierungen von Termumformungsregeln allein genügen nicht. Man muß auch lernen, sie präzise anzuwenden. Worin die präzise Anwendung einer Termumformungsregel besteht, wollen wir uns an einem Beispiel überlegen, nämlich an der Umformung:

$$x^2\cdot y\cdot\left(\frac{x\cdot y}{2}+3\cdot x\cdot z\right)=x^2\cdot y\cdot\frac{x\cdot y}{2}+x^2\cdot y\cdot 3\cdot x\cdot z$$

Der Vorgang besteht aus drei Schritten, die nicht immer streng hintereinander ablaufen, jedoch hier hintereinander besprochen werden sollen. Im ersten Schritt müssen wir in dem gegebenen Term eine Termstruktur erkennen, die man durch Kästchen visualisieren kann:

$$\boxed{x^2 \cdot y} \cdot \left(\boxed{\frac{x \cdot y}{2}} + \boxed{3 \cdot x \cdot z} \right)$$

Im zweiten Schritt müssen wir in unserem Langzeitgedächtnis eine auf diese Struktur passende Regel finden, die man mit Buchstaben hinschreiben kann:

$$\boxed{x^2 \cdot y} \cdot \left(\boxed{\frac{x \cdot y}{2}} + \boxed{3 \cdot x \cdot z} \right) \qquad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Im dritten Schritt müssen wir die Verbindung zwischen Termstruktur und Regel angeben, was z.B. dadurch geschehen kann, daß wir die Kästchen mit den Buchstaben der Regel beschriften:

$$\overset{A}{\boxed{x^2 \cdot y}} \cdot \left(\overset{B}{\boxed{\frac{x \cdot y}{2}}} + \overset{C}{\boxed{3 \cdot x \cdot z}} \right) \qquad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Jetzt kann die Umformung vorgenommen werden. Der gesamte Prozeß funktioniert nur, wenn jeder Teilprozeß funktioniert, weshalb jedem der drei Schritte im Unterricht besonderes Augenmerk zugewandt werden muß.

Selbstverständlich handelt es sich bei solchen bewußten Regelanwendungen nur um gelegentliche Übungen im Unterricht. Letzten Endes ist das Ziel ja ein automatisiertes Termumformen, das ohne bewußte Regelanwendung abläuft. Der derzeitige Algebraunterricht macht jedoch den Fehler, daß vom Schüler ein automatisiertes Termumformen schlagartig — quasi über Nacht — verlangt wird, statt dieses langsam zu entwickeln.

Demgegenüber haben wir in den letzten Jahren, zusammen mit H. BÜRGER und B. PERNITSCH, eine *Methode des schrittweisen Automatisierens* entwickelt (der derzeit aktuelle Stand dieser Entwicklung ist in PERNITSCH 1995 zu finden). Diese Methode besteht in einer gründlich durchdachten Abfolge von Lernschritten, die durch folgende Punkte charakterisiert sind:

- Die Lernschritte sind hierarchisch geordnet, d.h. jeder Lernschritt setzt (im großen und ganzen) die vorangegangenen Lernschritte voraus.

- In jedem Lernschritt wird eine neue Regelanwendung gelernt, die zunächst sehr genau behandelt wird (Hinschreiben einer Buchstabenregel, Zeichnen von Kästchen und deren Beschriftung). Es wird angenommen, daß sich diese neue Regelanwendung im Verlauf des Lernschrittes automatisiert. In nachfolgenden Lernschritten wird diese Regelanwendung dann nur mehr salopp behandelt (etwa durch eine sprachliche Beschreibung wie „Zusammenfassen" oder „Klammern miteinander multiplizieren"), es sei denn, ein Schüler hat damit Schwierigkeiten. In einem solchen Fall kann im Unterricht zu einem früheren Lernschritt zurückgekehrt werden und die Schwierigkeit durch größere Präzision in der Regelanwendung beseitigt werden.

- In jedem Lernschritt wird zunächst danach getrachtet, nicht zu viele Einzeltätigkeiten gleichzeitig im Kopf durchzuführen. In der Praxis wird dies häufig gemacht, z.B. werden bei der Umformung

$$5x^2 - 3x(x - y) = 2x^2 + 3xy$$

vier Einzeltätigkeiten gleichzeitig ausgeführt: Klammer mit $3x$ ausmultiplizieren, Klammer auflösen, $x \cdot x$ gleich x^2 setzen und $5x^2 - 3x^2$ zu $2x^2$ zusammenfassen. Das Ausführen zu vieler Einzeltätigkeiten in einem Schritt ist eine häufige Fehlerquelle für Schüler. Daher werden bei der beschriebenen Methode die einzelnen Schritte zunächst hintereinander ausgeführt und erst bei fortschreitender Automatisierung in immer größerem Ausmaß gleichzeitig.

Auf diese Weise wird ein langsames, schrittweises Automatisieren des Termumformens erreicht, das sich über die gesamte 3. und 4. Klasse erstrecken kann.

Es ist aus Platzgründen hier nicht möglich, die einzelnen Lernschritte im Detail zu beschreiben. Ich beschränke mich daher auf eine Kurzbeschreibung der ersten drei Lernschritte (für Details siehe PERNITSCH 1995).

1. Lernschritt: Zusammenfassen gleichartiger Ausdrücke; Herausheben

Schritte wie etwa $4 \cdot a + 6 \cdot a = 10 \cdot a$ können als selbstverständlich angesehen werden oder genauer so begründet werden:

$$\overset{A}{\boxed{4}} \cdot \overset{C}{\boxed{a}} + \overset{B}{\boxed{6}} \cdot \overset{C}{\boxed{a}} =$$
$$= (4+6) \cdot a =$$
$$= 10 \cdot a$$

$$A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C$$
$$4 + 6 = 10$$

2. Lernschritt: Vertauschen und Zusammenfassen in Summen und Produkten

$$\overset{A}{\boxed{3 \cdot x}} + \overset{B}{\boxed{2 \cdot y}} + \overset{C}{\boxed{x}} + \overset{D}{\boxed{5 \cdot y}} =$$
$$= 3 \cdot x + x + 2 \cdot y + 5 \cdot y =$$
$$= 4 \cdot x + 7 \cdot y$$

$$A + B + C + D = A + C + B + D$$
Zusammenfassen

Man beachte, daß nur der neue Schritt, nämlich das Vertauschen der Summanden, genauer durch eine Buchstabenregel begründet wird. Das Zusammenfassen wurde bereits im ersten Lernschritt automatisiert und wird daher nicht mehr ausführlich begründet. Analoge Aufgaben werden zum Vertauschen und Zusammenfassen in Produkten gestellt.

3. Lernschritt: Auflösen von Klammern

$$\overset{A}{\boxed{3 \cdot u}} - (\overset{B}{\boxed{6 \cdot u}} + \overset{C}{\boxed{2 \cdot v}}) - (-5 \cdot u - v) =$$
$$= \overset{A}{\boxed{3 \cdot u - 6 \cdot u - 2 \cdot v}} - (-\overset{B}{\boxed{5 \cdot u}} - \overset{C}{\boxed{v}}) =$$
$$= 3 \cdot u - 6 \cdot u - 2 \cdot v + 5 \cdot u + v =$$
$$= 3 \cdot u - 6 \cdot u + 5 \cdot u - 2 \cdot v + v =$$
$$= 2 \cdot u - v$$

$$A - (B + C) = A - B - C$$
$$A - (-B - C) = A + B + C$$
Vertauschen
Zusammenfassen

In diesem Stil geht es weiter. Die nächsten Lernschritte sind:

4. Lernschritt: Ausmultiplizieren von Klammern (Zahl mal Klammer)

5. Lernschritt: Kombination von Klammerauflösen und Klammerausmultiplizieren

6. Lernschritt: Multiplizieren von Klammern (Klammer mal Klammer)

7. Lernschritt: Kombination von Multiplizieren von Klammern und Klammerauflösen

8. Lernschritt: Faktorisieren

9. Lernschritt: Erweitern und Kürzen von Brüchen

10. Lernschritt: Addition von Brüchen

11. Lernschritt: Subtraktion von Brüchen

12. Lernschritt: Multiplikation von Brüchen

13. Lernschritt: Division von Brüchen

14. Lernschritt: Doppelbrüche

15. Lernschritt: Kombination vergangener Schritte

Diese kurze Zusammenstellung täuscht jedoch darüber hinweg, daß jeder Lernschritt eine Fülle von unterschiedlichen Aufgabenstellungen enthält, die zahlreiche „Teufel im Detail“ enthalten, welche im Unterricht gesondert behandelt werden müssen und oft unterschätzt werden.

Phase 4: Automatisiertes Termumformen (3. und 4. Klasse)

In dieser Phase sollen Termumformungen ohne bewußte Regelanwendungen durchgeführt werden. Auf das Hinschreiben von Buchstabenregeln oder das Zeichnen von Kästchen soll höchstens fallweise zurückgegriffen werden, vor allem dann, wenn Fehler passieren oder in der Aufgabenstellung bewußt eine präzise Begründung von Rechenschritten verlangt wird. Diese Phase entspricht im großen und ganzen dem traditionellen Üben und soll den Schülern eine relative Sicherheit bzw. Fertigkeit im Termumformen verleihen, wobei die Komplexität der Terme geringfügig gesteigert werden kann (jedoch unter Vermeidung von sinnlosen Termschlangen). Man muß sich in dieser Phase keineswegs auf das Umformen „nackter Terme“ beschränken, es gibt dazu durchaus auch sinnvolle Einkleidungen (mannigfache Beispiele findet man in PERNITSCH 1995).

Eine Bemerkung zu den Buchstabenregeln

Nach meinen bisherigen Erfahrungen wird der Vorschlag, mit Kästchen zu arbeiten, von Lehrern im allgemeinen positiv aufgenommen, der Vorschlag der zusätzlichen Verwendung von Buchstabenregeln stößt jedoch vielfach auf Widerstand (auch wenn es sich nur um eine gelegentliche Verwendung von Buchstabenregeln handelt). Dies wird als übertrieben und hochschulartig empfunden. Man meint, daß man richtiges Umformen auch ohne Buchstabenregeln anhand von Beispielen erlernen könne, weil sich dadurch mehr oder weniger unbewußte Handlungsschemata herausbilden, die zum richtigen Umformen genügen. Ich besteite nicht, daß man durch geeignete Beispiele Erfolge in dieser Richtung haben kann, doch ist durch empirische Untersuchungen nachgewiesen worden, daß trotz aller Vorsicht die Schüler anhand von Beispielen immer wieder inadäquate Handlungsschemata entwickeln, die zu Fehler führen (siehe dazu MALLE 1993, S. 166–187, 216–217). Schüler, die keine Buchstabenregeln kennen oder mit diesen nicht umgehen können, haben letztlich keine Kontrollinstanz, an der sie die Adäquatheit ihrer Handlungsschemata messen können.

Darüber hinaus geht es um etwas anderes. Es ist ein Lernziel, Schüler zum richtigen Umformen zu befähigen. Ein darüber hinausgehendes Lernziel besteht jedoch darin, sie zu einer Begründung ihrer Umformungsschritte (durch Berufung auf Regeln) zu befähigen. Das erste Ziel wird wohl niemand ernsthaft bestreiten. Beim zweiten gehen die Meinungen möglicherweise auseinander. Für mich ist jedenfalls auch das zweite Ziel unverzichtbar, zumindest für eine allgemeinbildende höhere Schule (es entspricht auch dem in den AHS-Lehrplänen genannten allgemeinen Lernziel des Begründenkönnens). Aber wie sollen solche Begründungen funktionieren, wenn Schüler nie gelernt haben, bewußt mit Buchstabenregeln umzugehen?

Literatur:

MALLE, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, Braunschweig.

PERNITSCH, B. (1995): Termumformen. Diplomarbeit an der Universität Wien (Kopie kann von G. Malle gegen Ersatz der Kopierkosten bezogen werden).